# FUNDAMENTO TEÓRICO

## 1. Introducción. Un proceso de Markov

Supongamos un sistema físico o matemático sometido a un proceso de cambio de tal forma que en un momento dado puede ocupar un número finito de estados. Por ejemplo, el tiempo en una ciudad podría considerarse en uno de los tres posibles estados: soleado, cubierto o lluvioso. O bien un individuo puede encontrarse en cuatro posibles estados emocionales: feliz, triste, enfadado o nervioso. Supongamos que dicho sistema cambia con el tiempo de un estado a otro y que en determinados períodos de tiempo se observa el estado en que se encuentra. Si el estado del sistema en una observación no se puede predecir con certeza, pero puede predecirse la probabilidad de que se encuentre en un estado determinado sabiendo en qué estado se encontraba en la observación anterior, entonces el proceso de cambio se denomina *cadena de Markov* o *proceso de Markov*.

**Definición 1**. Si una cadena de Markov posee $k$ posibles estados (numerados como $1, 2, \dots, k$) la probabilidad de que el sistema esté en el estado $i$ en cualquier observación después de que estuviera en el estado $j$ en la observación precedente se denota por $p_{ij}$ y se denomina *probabilidad de transición del estado $j$ al estado $i$.* La matriz $P = [p_{ij}]$ se denomina *matriz de transición de la cadena de Markov*.

Por ejemplo, en una cadena de Markov de tres estados, la matriz de transición tiene la forma:

$$\begin{array}{c} \text{Estado precedente} \\ \begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & & & \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \text{Nuevo estado} \end{array} \end{array}$$

En la que $p_{32}$ es la probabilidad de que el sistema cambie del estado 2 al 3 y $p_{11}$ es la probabilidad de que el sistema permanezca en el estado 1 después de estar en ese mismo estado.

### Ejemplo 1. Matriz de transición de una cadena de Markov

Una agencia de alquiler de vehículos dispone de tres centros designados por 1, 2 y 3. Un cliente puede alquilar un coche en cualquiera de los tres centros y devolverlo en cualquiera de ellos. El gerente determinó que los clientes devolvían los coches en los distintos locales de acuerdo con las siguientes probabilidades:

$$\begin{array}{c} \text{Centro de recogida} \\ \begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} & & \\ \begin{bmatrix} .8 & .3 & .2 \\ .1 & .2 & .6 \\ .1 & .5 & .2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \text{Centro} \\ \text{de} \\ \text{devolución} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Esta es la matriz de transición del sistema considerado como una cadena de Markov. En ella se observa, por ejemplo, que la probabilidad de recoger el vehículo en el centro 3 y devolverlo en el 2 es de 0,6.

## Ejemplo 2. Matriz de transición de una cadena de Markov

Revisando los libros de donaciones de la Asociación de antiguos alumnos de un instituto se observa que el 80% de los miembros que contribuyeron un año lo hicieron también el siguiente y el 30% de los que no contribuyeron sí lo hicieron el año siguiente. Esta situación puede representarse mediante una cadena de Markov con dos estados:

a) El estado 1 corresponde a los alumnos que pagan un año

b) El estado 2 corresponden a los alumnos que no pagan ese año.

La matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$$

En los ejemplos anteriores las matrices de transición poseen la propiedad de que los elementos de sus columnas suman 1. Esto no es un hecho accidental. Si $P = [p_{ij}]$ es la matriz de transición de una cadena de Markov con $k$ estados, entonces para cada $j$ (columna) debemos tener:

$$p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{kj} = 1 \quad (1)$$

ya que si el sistema está en el estado $j$ en cualquier observación es seguro que estará en cualquiera de los $k$ estados posibles en la siguiente.

Una matriz con la propiedad (1) se denomina *matriz estocástica, matriz de probabilidad o matriz de Markov*. De lo visto hasta ahora se deduce que una matriz de transición de una cadena de Markov debe ser una matriz estocástica.

En una cadena de Markov el estado del sistema en cualquier momento en que se observe no puede determinarse con certeza. Lo mejor que se puede hacer es determinar las probabilidades para cada uno de los estados posibles. Por ejemplo, en una cadena de Markov con tres estados describiremos el posible estado del sistema en una observación mediante el vector columna:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

En el que $x_i$ representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $i$. En general podemos establecer la siguiente defnicion.

**Definición 2**. El *vector de estado* para una observación de una cadena de Markov con $k$ estados es un vector columna cuyo elemento $i-\acute{e}simo$ representa la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado $i-\acute{e}simo$ en ese momento.

Obsérvese que los elementos de cualquier vector de estado son no negativos y suman 1. Un vector columna con dichas propiedades se denomina *vector de probabilidad*.

Supongamos ahora que conocemos el vector de estado $\boldsymbol{x}^{(0)}$ de una cadena de Markov en la observación inicial. El siguiente teorema nos permitirá determinar los vectores de estado en observaciones subsiguientes $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(n)}, \dots)$

**Teorema 1.** Si $P$ es una matriz de transición en una cadena de Markov y $\boldsymbol{x}^{(n)}$ es el vector de estado en la enésima observación, entonces $\boldsymbol{x}^{(n+1)} = P\boldsymbol{x}^{(n)}$.

De este teorema se sigue que:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}^{(1)} = P\boldsymbol{x}^{(0)}\\ \boldsymbol{x}^{(2)} = P\boldsymbol{x}^{(1)} = P^2\boldsymbol{x}^{(0)}\\ \boldsymbol{x}^{(3)} = P\boldsymbol{x}^{(2)} = P^3\boldsymbol{x}^{(0)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^{(n)} = P\boldsymbol{x}^{(n-1)} = P^n\boldsymbol{x}^{(0)}\end{gathered}$$

De esta forma el vector de estado inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$ y la matriz de transición $P$ determinan el vector de estado $\boldsymbol{x}^{(n)}$ para $n = 1, 2, \ldots$

Ejemplo 3. Ejemplo 2 revisado.

La matriz de transición del ejemplo 2 era: $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

Creamos ahora el registro de donaciones de un nuevo graduado que no ha pagado el primer año después de su graduación. Para dicho graduado, el sistema se encuentra inicialmente en el estado 2 con seguridad por lo que el vector de estado inicial es:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De el teorema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .3 \\ .7 \end{bmatrix}\\ \mathbf{x}^{(2)} &= P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .3 \\ .7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .45 \\ .55 \end{bmatrix}\\ \mathbf{x}^{(3)} &= P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ .2 & .7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} .45 \\ .55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .525 \\ .475 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Así, después de tres años la probabilidad de que el alumno pague es de 0,525. Si continuamos más allá de los tres años obtenemos los siguientes vectores de estado (con tres cifras decimales):

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} .563 \\ .438 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} .581 \\ .419 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(6)} = \begin{bmatrix} .591 \\ .409 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(7)} = \begin{bmatrix} .595 \\ .405 \end{bmatrix}\\ &\mathbf{x}^{(8)} = \begin{bmatrix} .598 \\ .402 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(9)} = \begin{bmatrix} .599 \\ .401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(10)} = \begin{bmatrix} .599 \\ .401 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(11)} = \begin{bmatrix} .600 \\ .400 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para todo $n > 11$ obtenemos

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \begin{bmatrix} 0{,}600 \\ 0{,}400 \end{bmatrix}$$

En otras palabras, los vectores estado convergen a un vector fijo a medida que las observaciones aumentan.

### Ejemplo 4. Ejemplo 1 revisado

La matriz de transición del ejemplo 1 era:

$$\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Si se recoge el coche en el local 2, el vector de estado inicial es:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A partir de este vector aplicamos el teorema anterior repetidamente y obtenemos los vectores de estados representados en la Tabla 1.

| $\mathbf{x}^{(n)}$ \ $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1^{(n)}$ | 0 | .300 | .400 | .477 | .511 | .533 | .544 | .550 | .553 | .555 | .556 | .557 |
| $x_2^{(n)}$ | 1 | .200 | .370 | .252 | .261 | .240 | .238 | .233 | .232 | .231 | .230 | .230 |
| $x_3^{(n)}$ | 0 | .500 | .230 | .271 | .228 | .227 | .219 | .217 | .215 | .214 | .214 | .213 |

*Tabla 1*

Para valores de $n$ mayores que 11 todos los vectores estado son iguales al vector $\boldsymbol{x}^{(11)}$ hasta la tercera cifra decimal.

En este ejemplo observamos dos cosas:

1. Que no ha sido necesario saber durante cuánto tiempo el cliente alquiló el coche, es decir, en un proceso de Markov el tiempo que pasa entre observaciones no es necesario que siempre sea el mismo.
2. Que los vectores de estado tienden hacia uno fijo a medida que aumenta el número de observaciones, al igual que en el ejemplo 1.

## 2. Comportamiento límite de los vectores de estado

En los ejemplos anteriores hemos visto que los vectores de estado se aproximan a un vector fijo a medida que el número de observaciones aumentan. Nos preguntamos ahora si este comportamiento se producirá siempre. Un ejemplo sencillo nos mostrará que no es así.

### Ejemplo 5. Un sistema que oscila entre dos vectores de estado

Sean: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces, como $P^2 = I$ y $P^3 = P$, tenemos que:

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}^{(3)} = \boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, este sistema oscila indefinidamente entre dos vectores de estado no aproximándose a ningún vector de estado fijo.

Sin embargo, si imponemos una leve condición a la matriz de transición vemos que el sistema tiende a un vector de estado fijo:

**Definición 3**. Una matriz de transición es *regular* si alguna de sus potencias enteras positivas posee todos sus elementos positivos.

Así, para una matriz de transición regular $P$ existe algún entero positivo $m$ de manera que todos los elementos de $P^m$ son positivos. Es el caso de las matrices de transición de los ejemplos 1 y 2 para $m = 1$.

Una cadena de Markov gobernada por una matriz de transición regular se denomina *cadena de Markov regular*. Veremos que toda cadena de Markov regular posee un vector de estado fijo $\boldsymbol{q}$ tal que $P^n\boldsymbol{x}^{(0)}$ se aproxima a $\boldsymbol{q}$ a medida que $n$ aumenta para cualquier vector de estado inicial $\boldsymbol{x}^{(0)}$.

**Teorema 2. Comportamiento de $P^n$ cuando $n \to \infty$**

Si $P$ es una matriz de transición regular, entonces cuando $n \to \infty$

$$P^n \to \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix}$$

donde $q_i$ son todos positivos y cumplen que $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$

Definamos

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

$Q$ es una matriz de transición cuyas columnas son iguales al vector de probabilidad $\boldsymbol{q}$. $Q$ posee la propiedad de que si $\boldsymbol{x}$ es cualquier vector de probabilidad entonces:

$$Q\mathbf{x} = \begin{bmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{bmatrix}$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = (1)\mathbf{q} = \mathbf{q}$$

Es decir, $Q$ transforma cualquier vector de probabilidad $\boldsymbol{x}$ en el vector fijo de probabilidad $\boldsymbol{q}$, lo que nos lleva al siguiente teorema:

**Teorema 3. Comportamiento de $P^n x$ cuando $n \to \infty$**
Si $P$ es una matriz de transición regular y $\boldsymbol{x}$ cualquier vector de probabilidad, cuando $n \to \infty$ se tiene que:

$$P^n \boldsymbol{x} \to \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}$$

donde $\boldsymbol{q}$ es un vector de probabilidad fijo, independiente de $n$, todos cuyos elementos son positivos.

Combinándolo con el teorema 2 obtenemos que $P^n \boldsymbol{x} \to Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ cuando $n \to \infty$. El vector $\boldsymbol{q}$ se denomina *vector de estado estacionario* o *vector de equilibrio* de una cadena de Markov regular.

Para sistemas con varios estados la forma más efectiva de calcular el vector de estado estacionario consiste en calcular $P^n \boldsymbol{x}$ para valores de $n$ grandes. El siguiente teorema nos proporciona otra forma de calcularlo.

**Teorema 4. Vector de estado estacionario.**
El vector de estado estacionario $\boldsymbol{q}$ de una matriz de transición regular $P$ es el único vector de probabilidad que satisface la ecuación $P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$.

Para verlo consideremos la igualdad matricial $PP^n = P^{n+1}$. Por el teorema 2, tanto $P^n$ como $P^{n+1}$ se aproximan a $Q$ cuando $n \to \infty$. Sustituyendo en la igualdad anterior obtenemos $PQ = Q$. Cualquiera de las columnas de esta ecuación matricial da $P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$. Para ver que $\boldsymbol{q}$ es el único vector de probabilidad que satisface esta ecuación, supongamos que $\boldsymbol{r}$ es otro vector de probabilidad que cumple que $P\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$. Entonces también se cumplirá que $P^n \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ para $n = 1, 2, \ldots$. Si hacemos que $n \to \infty$ , por el teorema 3 obtenemos que $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$.

El teorema 4 puede expresarse también diciendo que el sistema lineal homogéneo $(I - P)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ tiene como solución única el vector $\boldsymbol{q}$ cuyos elementos son todos no negativos y cumplen $q_1 + q_2 + \cdots + q_k = 1$. Se observa que el vector $\boldsymbol{q}$ es un autovector de la matriz $P$ asociado al autovalor $\lambda = 1$[1].

Podemos aplicar esta técnica para calcular los vectores de estado estacionario de algunos ejemplos anteriores.

Ejemplo 2 revisado.

En el ejemplo 2 la matriz de transición era: $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix}$

Por lo que el sistema homogéneo $(I - P)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ es:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que se reduce a una única ecuación independiente: $0{,}2q_1 - 0{,}3q_2 = 0 \Rightarrow q_1 = 1{,}5q_2$

Tomando $q_2 = s$ como variable libre, las soluciones se pueden expresar como:

[1] *Autovalores se verán en el Tema 5 del curso*

$$\boldsymbol{q} = s\begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para hacer que $\boldsymbol{q}$ sea un vector de probabilidad tomamos $s = \frac{1}{1{,}5+1} = 0{,}4$ por tanto el vector de estado estacionario buscado es $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$. Es decir, a largo plazo, el 60% de los alumnos pagarán y el 40% no.

## Ejemplo 1 revisado

En el ejemplo 1 la matriz de transición era: $P = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{bmatrix}$

Por lo que el sistema lineal homogéneo $(I - P)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ es:

$$\begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}3 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}1 & -0{,}5 & 0{,}8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss-Jordan la matriz escalonada reducida equivalente a la matriz de coeficientes es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{34}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{14}{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando $q_3 = s$ como variable libre, el conjunto solución se expresa como:

$$\boldsymbol{q} = s \cdot \begin{bmatrix} \frac{34}{13} \\ \frac{14}{13} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para que el vector $\boldsymbol{q}$ sea un vector de probabilidad debemos tomar $s = \frac{1}{\frac{34}{13}+\frac{14}{13}+1} = \frac{13}{61}$

Por lo que el vector de estado estacionario del sistema es:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \frac{34}{61} \\ \frac{14}{61} \\ \frac{13}{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5573\ldots \\ 0{,}2295\ldots \\ 0{,}2131\ldots \end{bmatrix}$$

El script de Matlab para el cálculo del vector estacionario $\boldsymbol{q}$ es:

```
P=[0.8 0.3 0.2;0.1 0.2 0.6;0.1 0.5 0.2];
q1=null(eye(3)-P);
q=q1/sum(q1)
```

El resultado es:

```
>>q =

    0.5574
    0.2295
    0.2131
```

Que coincide con el resultado obtenido en la Tabla 1. Los elementos de $\boldsymbol{q}$ son las probabilidades a largo plazo de que cualquier vehículo esa devuelto en el centro 1, 2 ó 3 respectivamente. Si la agencia de alquiler tiene una flota de 1.000 vehículos debería dimensionar sus instalaciones de forma que haya al menos 558 plazas en el centro 1, 230 en el 2 y 214 en el 3.

## EJERCICIO PRÁCTICO

El propósito de esta práctica es aplicar la teoría de cadenas de Markov a diversas situaciones de la vida real empleando la potencia de cálculo de Matlab.

### Ejercicios

**Ejercicio 1.** Un animal de laboratorio puede comer cualquiera de tres alimentos cada día. Los registros indican que, si el animal elige un alimento en un ensayo, elegirá el mismo alimento en el siguiente ensayo con una probabilidad del 50%, y elegirá cualquiera de los otros alimentos en el siguiente ensayo con iguales probabilidades del 25%.

a) La matriz de transición $P$ definida por esta situación es tal que el elemento $i, j$ de $P$, $[p_{ij}]$ es la probabilidad de que, si un animal escoge el alimento $j$ en el primer ensayo, entonces escogerá el alimento $i$ en el segundo ensayo. Por lo tanto, el elemento $i, j$ de $P^2$ es la probabilidad de que, si un animal escoge el alimento $j$ en el primer ensayo, entonces escogerá el alimento $i$ en el tercero.

Determina $P$ y calcula $P^2$

b) Supongamos que un animal elige la comida #1 en el primer ensayo. Mediante $P$ y $P^2$ encuentra la probabilidad de que el animal:

b.1) Elija la comida #2 en el segundo ensayo
b.2) Elija la comida #2 en el tercer ensayo
b.3) Elija la comida #3 en el tercer ensayo

c) Calcula la solución general $\boldsymbol{x}$ al sistema $(P - I)\boldsymbol{x} = 0$. Elige un valor distinto de cero para la variable libre y escribe una solución particular $\boldsymbol{w}$.

d) Calcula el vector de estado estacionario $\boldsymbol{q}$ de la matriz $P$. (Recuerda que la función `sum(A)` de Matlab calcula la suma de los elementos de las columnas de A). Explica por qué $\boldsymbol{q}$ es un vector de probabilidad. Comprueba que $\boldsymbol{q}$ satisface $P\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}$.

e) Explique por qué $P$ es una matriz estocástica regular, y por qué $\boldsymbol{q}$ debe ser su único vector de estado estacionario.

**Ejercicio 2.** El clima en Columbus (Ohio) es bueno regular o malo en un día determinado. Si el clima es bueno hoy hay 60% de probabilidad de que sea bueno mañana, 30% de probabilidad de que sea regular y 10% de que sea malo. Si el clima es regular hoy existe un 40% de probabilidad de que sea bueno mañana y un 30% de probabilidad de que sea regular. Por último, si el clima es malo hoy existe un 40% de probabilidad de que sea bueno mañana y 50% de que sea regular.

a) Determina la matriz de transición $W$ y el vector $\boldsymbol{v}$ inicial que describe el clima "hoy" sabiendo que hay un 50% de probabilidad de que hoy el clima sea bueno y un 50% de que sea regular. (La matriz $W$ debe ser estocástica, y $\boldsymbol{v}$ debe ser un vector de probabilidad).

b) Guarda el vector $\boldsymbol{v}$ como una columna y calcula $W \cdot \boldsymbol{v}$. Con el resultado obtenido, ¿cuál es la posibilidad de que haya mal tiempo mañana?

c) Supongamos que, de acuerdo con los pronósticos para el lunes, hay un 40% de probabilidad de que el tiempo sea regular y un 60% de que sea malo. ¿Cuál es la probabilidad de tener buen tiempo el miércoles?

d) Calcular el vector de estado estacionario $\boldsymbol{q}$ para $W$. A largo plazo, ¿cuál es la probabilidad de que el clima sea bueno en un día determinado?

**Ejercicio 3.** Cuando $P$ es estocástica y regular, y $\boldsymbol{v}$ es cualquier vector de probabilidad, la secuencia de vectores $\boldsymbol{v}, P\boldsymbol{v}, P^2\boldsymbol{v}, \ldots$ convergerá, y el vector límite será el vector de estado estacionario de $P$. En otras palabras, cuando la potencia $k$ sea lo suficientemente grande, $P^k\boldsymbol{v}$ se verá como el único vector de estado estacionario. Este método no es una forma eficiente de calcular el vector de estado estacionario, pero es interesante ver las secuencias v $\boldsymbol{v}, P\boldsymbol{v}, P^2\boldsymbol{v}, \ldots$ convergen para algunos ejemplos.

Aplica este método tanto para $P$ (ejercicio 1) como para $W$ (ejercicio 2). Utiliza cada uno de los vectores iniciales que se muestran a continuación y al menos un vector de probabilidad $\boldsymbol{v}$ elegido por tí. Para cada $\boldsymbol{v}$, calcula $P^k\boldsymbol{v}$ hasta que encuentres una $k$ lo suficientemente grande como para que $P^k\boldsymbol{v}$ se parezca al vector de estado estacionario para $P$ (compáralo con los vectores de estado estacionario del ejercicio 1). Repite esto para cada $\boldsymbol{v}$ y $W$, y registra el valor más pequeño de $k$. (Supon que la diferencia entre el vector calculado y el estacionario debe ser menor de 4 cifras significativas). Para encontrar el valor de k mínimo, emplea un bucle `while-end` en Matlab limitado por el error de $10^{-4}$

Para el ejercicio 1:

| Vector inicial $\boldsymbol{v}$ | $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0.2\\0.6\\0.2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0.35\\0.35\\0.3\end{bmatrix}$ | tu elección $\begin{bmatrix}\\ \\ \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|
| Valor de $k$ | | | | |

Para el ejercicio 2:

| Vector inicial $\boldsymbol{v}$ | $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0.2\\0.6\\0.2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}0.35\\0.35\\0.3\end{bmatrix}$ | tu elección $\begin{bmatrix}\\ \\ \end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|
| Valor de $k$ | | | | |

**Ejercicio 4.** Dadas las siguientes matrices:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determina razonadamente cuáles de ellas son regulares y cuáles no y el por qué de tu respuesta.

b) Escribe `format compact` en Matlab para restaurar la forma corta habitual para la visualización de números. Luego calcula los vectores de estado estacionario para $P_1, P_2$ y $P_3$.Registra los vectores de estado estacionario en la tabla de abajo. Establece razonadamente si el vector de estado estacionario es único.

| | Vector de estado estacionario | ¿Es el vector de estado estacionario único? | Si $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ¿converge $P^k$ al aumentar $k$?. Si no es así, ¿qué sucede? |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | | | |
| $P_2$ | | | |
| $P_3$ | | | |

## Tarea

Emplea Matlab para los cálculos y sube el archivo “Practica3Grupoxx.m” en el que detalles las respuestas a las preguntas. Sigue el formato indicado en el curso.